教學時數

- 7小時

活動 1 以「平方根的概念」解形如 $(ax+b)^2=c$ 的方程式。

教學眉批

- 為了讓學生體會單靠因式分解並不能解所有的一元二次方程式，故在此列舉一些不能用因式分解來求解的方程式，以引起學生進一步學習的動機。
- 例題 1 第 (2) 題中，$x-5=\pm3$ 與 $x=5\pm3$ 兩式中的「±」意義不同，前者為性質符號，即「正負號」，後者為運算符號，即「加減號」。

注意事項

- 評量時，對於學生的答案形式不必太強調，以下情況皆可視為正確：
  (1) $(x-5)^2=9$ 的兩根寫為「$x=8$ 或 $x=2$」或「$x=8$ 和 $x=2$」或「$x=8$、2」。
  (2) $(x-1)^2=0$ 的解寫為「兩根為 $x=1$ 或 $x=1$」或「根為 $x=1$」。

4-2 配方法與公式解

1 平方根解法

對應能力指標 8-a-15

在 4-1 節我們學過利用因式分解來解一元二次方程式，但對於 $x^2-7=0$ 或 $x^2+6x+4=0$ 這類方程式，用因式分解法解題似乎發生了困難。接下來，我們要學習解一元二次方程式的另一種方法。首先，我們來觀察方程式 $x^2-7=0$，如果整理成 $x^2=7$ 的形式，根據平方根的概念，就可得到 $x=\pm\sqrt{7}$。

例題 1 運用平方根求解

配合習作 P46 基礎題 1

解下列一元二次方程式：

(1) $x^2=9$　　(2) $(x-5)^2=9$　　(3) $x^2=-9$

解 (1) 因為 $x^2=9$，由平方根的概念可得 $x=\pm\sqrt{9}=\pm3$。
方程式 $x^2=9$ 的解為 3 與 -3。

(2) 將 $(x-5)^2=9$ 看成 $A^2=9$，其中 A 代表 $x-5$。
由平方根的概念可得 $A=\pm3$，
也就是說 $x-5=\pm3$。
由 $x-5=3$，得 $x=8$。
由 $x-5=-3$，得 $x=2$。

可寫成：
$x-5=\pm3$
$x=5\pm3$
$x=8$ 或 $x=2$

方程式 $(x-5)^2=9$ 的解為 8 與 2。

(3) 因為負數沒有平方根，所以方程式 $x^2=-9$ 沒有解。

隨堂練習

解下列一元二次方程式：

(1) $x^2=25$
$x=\pm\sqrt{25}=\pm5$

(2) $(2x-5)^2=49$
$2x-5=\pm7$
$x=6$ 或 $x=-1$。

(3) $x^2+4=0$
方程式 $x^2+4=0$ 沒有解。

配套指示器

- 類題熟練本 P54
- MPB 一元二次方程式 P7～12

補充問題

- 解下列一元二次方程式：

(1) $\dfrac{x^2}{9}=\dfrac{25}{4}$　　$\pm\dfrac{15}{2}$

(2) $1+(2x-1)^2=0$　　沒有解

(3) $\left(\dfrac{x}{3}+1\right)^2-1=0$　　$0，-6$

例題 2 運用平方根求解，並檢驗

解下列一元二次方程式，並將求得的解代回原方程式檢驗：

(1) $(x-5)^2=7$　　(2) $(3x-1)^2=8$

解 (1) 將 $(x-5)^2=7$ 看成 $A^2=7$，其中 A 代表 $x-5$，

所以 $A=\pm\sqrt{7}$

即 $x-5=\pm\sqrt{7}$，$x=5\pm\sqrt{7}$

方程式 $(x-5)^2=7$ 的解為 $5+\sqrt{7}$ 與 $5-\sqrt{7}$。

檢驗：$[(5+\sqrt{7})-5]^2=(\sqrt{7})^2=7$，$[(5-\sqrt{7})-5]^2=(-\sqrt{7})^2=7$

(2) 8 的平方根為 $\pm\sqrt{8}$，所以 $3x-1=\pm\sqrt{8}$

$3x-1=\pm2\sqrt{2}$　整理成最簡根式

$3x=1\pm2\sqrt{2}$

$x=\dfrac{1\pm2\sqrt{2}}{3}$ (或 $\dfrac{1}{3}\pm\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$)

方程式 $(3x-1)^2=8$ 的解為 $\dfrac{1+2\sqrt{2}}{3}$ 與 $\dfrac{1-2\sqrt{2}}{3}$。

檢驗：

$(3\times\dfrac{1+2\sqrt{2}}{3}-1)^2=(2\sqrt{2})^2=8$，$(3\times\dfrac{1-2\sqrt{2}}{3}-1)^2=(-2\sqrt{2})^2=8$

隨堂練習

解下列各方程式，並將求得的解代回原方程式檢驗：

(1) $(x+3)^2=5$

$x+3=\pm\sqrt{5}$，$x=-3\pm\sqrt{5}$

檢驗：

$[(-3+\sqrt{5})+3]^2=(\sqrt{5})^2=5$

$[(-3-\sqrt{5})+3]^2=(-\sqrt{5})^2=5$

(2) $(2x-7)^2-4=8$

$(2x-7)^2=12$，$x=\dfrac{7}{2}\pm\sqrt{3}$

檢驗：

$[2(\dfrac{7}{2}+\sqrt{3})-7]^2-4=8$

$[2(\dfrac{7}{2}-\sqrt{3})-7]^2-4=8$

教學眉批

- 例題 2 第(1)題中，以 A 代換的步驟，學生熟練後即可省略。
- 爲了配合公式解的推導過程，本節例題均先將根式整理爲最簡根式後，再移項得 x 值。

補充問題

- 解下列一元二次方程式：

(1) $(2x-3)^2=\dfrac{9}{4}$

$\dfrac{9}{4}$，$\dfrac{3}{4}$

(2) $(\dfrac{3}{2}x+1)^2-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}$

$-\dfrac{2}{9}$，$-\dfrac{10}{9}$

(3) $(\dfrac{2}{3}x-2)^2=\dfrac{8}{9}$

$3\pm\sqrt{2}$

配套指示器

- 類題熟練本 P54

活動2 將形如 x^2+ax 的式子加上 $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ 後，配成 $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2$。

由前面的練習可知，形如 $(ax+b)^2=c$ 的一元二次方程式，可利用平方根的概念來求解。

但方程式 $x^2+6x+4=0$ 無法用因式分解法來求解，也不是 $(ax+b)^2=c$ 的形式，該如何求解呢？

在前面的隨堂練習中，

方程式 $(x+3)^2=5$ ……………………①

↓

可展開成 $x^2+6x+9=5$ ……………②

↓

再整理為 $x^2+6x+4=0$ ……………③

③式即是我們要求解的方程式，因此若能將 $x^2+6x+4=0$ 整理成 $(x+3)^2=5$，就可利用平方根的概念，求得此方程式的解。

而如何將 $x^2+6x+4=0$ 變成 $(x+3)^2=5$ 呢？

我們試著將①至③式逆寫如下來觀察：

$x^2+6x+4=0$ ……………③

↓

$x^2+6x+9=5$ ……………②

↓

$(x+3)^2=5$ ………………①

可發現關鍵在於如何利用和的平方公式，將 x^2+6x 配成完全平方式 $(x+3)^2$。

因此我們先來學習，如何將一個式子依照和的平方公式（或差的平方公式）配成完全平方式。

教學眉批

- 教師宜引導學生觀察③式如何變成①式，並讓學生發表想法。

數學小語錄

沒有知識的人總愛議論別人的無知，而知識豐富的人卻時時發現自己的無知。

——笛卡兒（René Descartes，1596-1650）

補充問題

- 解下列一元二次方程式：

(1) $(x+6)^2=72$

$-6\pm6\sqrt{2}$

(2) $(x+9)^2=98$

$-9\pm7\sqrt{2}$

配合習作 P46 基礎題 2

例題 3 配方

分別將適當的數填入□中，使該式子可以配成一個完全平方式，並將它寫成完全平方的形式。

(1) $x^2+8x+\square$　　(2) $x^2-5x+\square$　　(3) $x^2-\frac{4}{3}x+\square$

解 (1) 和的平方公式：$a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2$

$x^2+8x+\square=x^2+2\cdot x\cdot 4+\square$

因為 x 的係數是正數，所以對照和的平方公式。

所以 $b=4$，$b^2=4^2=16$。

即 $x^2+8x+\boxed{16}=x^2+2\cdot x\cdot 4+\boxed{4^2}=(x+4)^2$

(2) 差的平方公式：$a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2$

$x^2-5x+\square=x^2-2\cdot x\cdot \frac{5}{2}+\square$

因為 x 的係數是負數，所以對照差的平方公式。

所以 $b=\frac{5}{2}$，$b^2=(\frac{5}{2})^2=\frac{25}{4}$。

即 $x^2-5x+\boxed{\frac{25}{4}}=x^2-2\cdot x\cdot \frac{5}{2}+\boxed{(\frac{5}{2})^2}=(x-\frac{5}{2})^2$

(3) 差的平方公式：$a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2$

$x^2-\frac{4}{3}x+\square=x^2-2\cdot x\cdot \frac{2}{3}+\square$

因為 x 的係數是負數，所以對照差的平方公式。

所以 $b=\frac{2}{3}$，$b^2=(\frac{2}{3})^2=\frac{4}{9}$。

即 $x^2-\frac{4}{3}x+\boxed{\frac{4}{9}}=x^2-2\cdot x\cdot \frac{2}{3}+\boxed{(\frac{2}{3})^2}=(x-\frac{2}{3})^2$

隨堂練習

在□中填入適當的數，使得下列各式可以配成完全平方式。

(1) $x^2-12x+\square$　　(2) $x^2+9x+\square$　　(3) $x^2+\frac{1}{4}x+\square$

36　　$\frac{81}{4}$　　$\frac{1}{64}$

教學眉批

- 在教學「使用乘法公式來配成完全平方的形式」時，要對照適當的乘法公式。
- 教師可適度強調：當 x 項的係數是正數時，要對照和的平方公式；當 x 項的係數是負數時，要對照差的平方公式。

補充問題

1. 若 $x^2+mx+49$ 可配成完全平方式，且 $m<0$，則 $m=$ <u>-14</u>。
2. 若 x^2+mx+1 可配成完全平方式，則 $m=$ <u>± 2</u>。

配套指示器

- 類題熟練本 P54、55

教學眉批

- 觀察例題 3 的結果時，教師宜引導學生充分發表自己的看法。
- 做結論時，教師宜口頭強調：「加上二分之一 x 項係數的平方，可配成完全平方式」及「x 項係數爲正數，配成和的平方；x 項係數爲負數，配成差的平方」。
- 學生在進行隨堂練習時，教師宜提醒直接利用上面的結論來作答，不須再對照乘法公式。

觀察例題 3 的結果：

(1) $x^2+8x+4^2=(x+4)^2$

(2) $x^2-5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2$

(3) $x^2-\frac{4}{3}x+\left(\frac{2}{3}\right)^2=\left(x-\frac{2}{3}\right)^2$

我們可以得到下列的結論：

$$x^2+mx+\left(\frac{m}{2}\right)^2=\left(x+\frac{m}{2}\right)^2$$
$$x^2-mx+\left(\frac{m}{2}\right)^2=\left(x-\frac{m}{2}\right)^2$$

利用上面的結論，讓我們再來練習下面的問題。

隨堂練習

在空格中填入適當的數，使得下列各式可以配成完全平方式。

(1) x^2-16x+ __64__ $=(x-$ __8__ $)^2$

(2) x^2+7x+ __$\frac{49}{4}$__ $=(x+$ __$\frac{7}{2}$__ $)^2$

(3) $x^2-\frac{2}{5}x+$ __$\frac{1}{25}$__ $=(x-$ __$\frac{1}{5}$__ $)^2$

配套指示器

- 類題熟練本 P55
- 十分鐘輕鬆考基礎篇第 37 回

補充問題

- 若 $9x^2-42x+m$ 爲完全平方式，求 m。

49

2 配方法解一元二次方程式

對應能力指標 8-a-15

學會將式子配成完全平方式後，對於使用因式分解法求解有困難的一元二次方程式，我們就可以將方程式整理成左邊是一個完全平方式，右邊是一個常數的形式，再利用平方根的概念來求解。

配合習作 P47 基礎題 3(1)

例題 4 二次項係數為 1

解下列一元二次方程式：

(1) $x^2-6x-3=0$　　(2) $x^2+8x+3=0$

解 (1) $x^2-6x-3=0$

$x^2-6x=3$ ← 將常數項移到等號右邊

$x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2=3+3^2$ ← 等號兩邊同加 $(\frac{6}{2})^2$

$(x-3)^2=12$

$x-3=\pm\sqrt{12}$ ← 平方根概念

$x-3=\pm 2\sqrt{3}$ ← 化簡

$x=3\pm 2\sqrt{3}$

所以方程式 $x^2-6x-3=0$ 的解為 $3+2\sqrt{3}$ 與 $3-2\sqrt{3}$。

(2) $x^2+8x+3=0$

$x^2+8x=-3$

$x^2+2\cdot x\cdot 4+4^2=-3+4^2$

$(x+4)^2=13$

$x+4=\pm\sqrt{13}$

$x=-4\pm\sqrt{13}$

所以方程式 $x^2+8x+3=0$ 的解為 $-4+\sqrt{13}$ 與 $-4-\sqrt{13}$。

活動 3 利用配方法將一元二次方程式變成 $(x+a)^2=b$ 或 $(x-a)^2=b$，再求其解。

教學眉批

- 本節配方法的例題，教師可明訂解題步驟如下：
  (1)將 x^2 項的係數變成 1。
  (2)將常數項移到等號右邊。
  (2)將等號左邊配成完全平方式。
  （口頭強調：等號兩邊同加二分之一 x 項係數的平方）
  (4)利用平方根的概念解題。

補充問題

- 解下列一元二次方程式：
  (1) $x^2-2x-5=0$
  $1\pm\sqrt{6}$
  (2) $x^2+4x+2=0$
  $-2\pm\sqrt{2}$

配套指示器

- 類題熟練本 P55

隨堂練習

解下列一元二次方程式：

(1) $x^2+4x+1=0$

$x^2+4x=-1$

$(x+2)^2=-1+2^2=3$

$x+2=\pm\sqrt{3}$

$x=-2\pm\sqrt{3}$

(2) $x^2-12x+5=0$

$x^2-12x=-5$

$(x-6)^2=-5+6^2=31$

$x-6=\pm\sqrt{31}$

$x=6\pm\sqrt{31}$

像例題 4 這種先將 $x^2-6x-3=0$ 整理成 $(x-3)^2=12$，再利用平方根的概念來求解的過程，稱為**配方法**。

在例題 4 中，我們利用配方法求出二次項係數為 1 的一元二次方程式的解，但是當一元二次方程式的二次項係數不是 1 時，該如何處理呢？

配合習作 P47 基礎題 3(2)

例題 5 二次項係數不為 1

解下列一元二次方程式：

(1) $2x^2+5x+1=0$　　(2) $-\frac{1}{3}x^2+2x-\frac{1}{2}=0$

解 (1) $2x^2+5x+1=0$

$x^2+\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}=0$　　同除以 2，將 x^2 的係數變成 1

$x^2+\frac{5}{2}x=-\frac{1}{2}$　　將常數項移到等號右邊

$x^2+\frac{5}{2}x+(\frac{5}{4})^2=-\frac{1}{2}+(\frac{5}{4})^2$　　等號兩邊同加 $(\frac{5}{2}\div 2)^2$

$(x+\frac{5}{4})^2=\frac{17}{16}$

$x+\frac{5}{4}=\pm\sqrt{\frac{17}{16}}$

$x+\frac{5}{4}=\pm\frac{\sqrt{17}}{4}$

$x=-\frac{5}{4}\pm\frac{\sqrt{17}}{4}$（或 $\frac{-5\pm\sqrt{17}}{4}$）

方程式 $2x^2+5x+1=0$ 的解為 $\frac{-5+\sqrt{17}}{4}$ 與 $\frac{-5-\sqrt{17}}{4}$。

教學眉批

- x^2 項係數不是 1 的一元二次方程式，只要將方程式中的每一項同除以 x^2 項的係數，就可變成與例題 4 類似的問題，此時學生便能自行完成了。
- 例題 5 第(1)題 中，將 $x=-\frac{5}{4}\pm\frac{\sqrt{17}}{4}$ 寫成 $x=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{4}$ 可與公式解的結果相呼應。

配套指示器

- 類題熟練本 P55

補充問題

1. 解下列一元二次方程式：

(1) $x^2-3x+1=0$

$\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$

(2) $x^2+4x-11=0$

$-2\pm\sqrt{15}$

2. 利用配方法解 $9x^2+mx-20=0$，可得 $x=\frac{2}{3}\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$，求 m。

-12

(2) $-\frac{1}{3}x^2+2x-\frac{1}{2}=0$

$x^2-6x+\frac{3}{2}=0$　　同乘以 -3，將 x^2 的係數變成 1

$x^2-6x=-\frac{3}{2}$

$x^2-6x+3^2=-\frac{3}{2}+3^2$

$(x-3)^2=\frac{15}{2}$

$x-3=\pm\sqrt{\frac{15}{2}}$

$x-3=\pm\frac{\sqrt{30}}{2}$

$x=3\pm\frac{\sqrt{30}}{2}$

方程式 $-\frac{1}{3}x^2+2x-\frac{1}{2}=0$ 的解為 $3+\frac{\sqrt{30}}{2}$ 與 $3-\frac{\sqrt{30}}{2}$ 。

隨堂練習

解下列一元二次方程式：

(1) $3x^2-6x+2=0$

$x^2-2x+\frac{2}{3}=0$

$x^2-2x=-\frac{2}{3}$

$(x-1)^2=-\frac{2}{3}+1^2=\frac{1}{3}$

$x-1=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$

$x=1\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

(2) $-\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{4}x=\frac{1}{3}$

$x^2+3x=-\frac{4}{3}$

$(x+\frac{3}{2})^2=-\frac{4}{3}+(\frac{3}{2})^2=\frac{11}{12}$

$x+\frac{3}{2}=\pm\sqrt{\frac{11}{12}}$

$x=-\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{33}}{6}$

教學眉批

■ 為加深學生的印象，配方法的例題解法請依P163教學眉批的步驟，配合口頭強調逐步說明，以利後面公式推導的教學。

補充問題

■ 解下列一元二次方程式：

(1) $\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{6}x-\frac{2}{3}=0$

$\frac{-1\pm\sqrt{33}}{4}$

(2) $-\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{2}x=-1$

$\frac{1\pm\sqrt{13}}{3}$

配套指示器

■ 類題熟練本 P56

由上面的練習，我們知道若一個一元二次方程式無法使用因式分解法解題時，我們可以用配方法來解題。其實，當某個一元二次方程式用因式分解法不易解題時，我們也可以使用配方法來解題，例如下面的例題：

教學眉批

■ 例題 6 的常數項較大，要依十字交乘法分解成兩個適當的數，可能要花相當長的時間，此時以配方法按部就班的做，較容易求解。

例題 6 常數項不易分解

配合習作 P47 基礎題 3(3)

解一元二次方程式 $x^2-2x-899=0$。

解 $x^2-2x-899=0$

$x^2-2x=899$

$x^2-2x+1^2=899+1^2$

$(x-1)^2=900$

$x-1=\pm\sqrt{900}$

$x-1=\pm 30$

$x=1\pm 30$

$x=31$ 或 $x=-29$

方程式 $x^2-2x-899=0$ 的解為 31 與 -29。

由例題 6 的解，我們可以發現一元二次方程式 $x^2-2x-899=0$ 也可以用十字交乘法分解成 $(x-31)(x+29)=0$。但是要將 899 分解成 31×29 實在不容易，此時使用配方法解題是一個較好的策略。

■ 學生此時尚未學過虛數（$\sqrt{-1}$），因此例題 7 的情形，我們告訴學生是「沒有解」。

例題 7 無平方根

配合習作 P47 基礎題 3(4)

解一元二次方程式 $x^2-2x+6=0$。

解 $x^2-2x+6=0$

$x^2-2x=-6$

$x^2-2x+1^2=-6+1^2$

$(x-1)^2=-5$

因為負數沒有平方根，所以此方程式沒有解。

配套指示器

■ 類題熟練本 P56

補充問題

■ 解下列一元二次方程式：

(1) $x^2-2x-1023=0$

33，-31

(2) $x^2+12x-1260=0$

30，-42

隨堂練習

解下列一元二次方程式：

(1) $x^2+4x-396=0$

$x^2+4x=396$

$x^2+4x+2^2=396+2^2$

$(x+2)^2=400$

$x+2=\pm 20$

$x=18$ 或 $x=-22$。

(2) $x^2+25=-6x$

$x^2+6x=-25$

$x^2+6x+3^2=-25+3^2$

$(x+3)^2=-16$

因為負數沒有平方根，

所以此方程式沒有解。

例題 8 配方法的應用

若方程式 $x^2-12x+p=0$ 可配方成 $(x-6)^2=4$ 的形式，則 p 的值是多少？

解一 $x^2-12x+p=0$

$x^2-12x=-p$

$x^2-12x+6^2=-p+6^2$

$(x-6)^2=36-p$

與 $(x-6)^2=4$ 對照得 $36-p=4$，$p=32$。

解二 將 $(x-6)^2=4$ 展開整理為

$x^2-12x+36=4$

$x^2-12x+32=0$

與 $x^2-12x+p=0$ 對照得 $p=32$。

隨堂練習

若方程式 $x^2-8x+p=0$ 可配方成 $(x-4)^2=1$ 的形式，則 p 的值是多少？

$x^2-8x=-p$

$x^2-8x+4^2=-p+4^2$

$(x-4)^2=-p+16$

與 $(x-4)^2=1$ 對照得 $p=15$。

教學眉批

- 對於較不會使用配方法的學生，可鼓勵用**解二**的方法來解例題 8。

補充問題

1. 若方程式 $x^2+px+q=0$ 可用配方法化簡得 $x-\frac{3}{2}=\pm\sqrt{2}$，則 $p+q=$ $\underline{-\frac{11}{4}}$。
2. 若方程式 $x^2-6x+q=0$ 可配方成 $(x+p)^2=5$，則 $p-q=$ $\underline{-7}$。
3. 若方程式 $x^2+8x+1=0$ 可配方成 $(x+a)^2=b$，則 $a+b=$ $\underline{19}$。
4. 將方程式 $(2x-1)^2=4(2x-1)^2-12$ 配方成 $(x+a)^2=b$，則 $2a+4b=$ $\underline{3}$。

配套指示器

- 類題熟練本 P56
- 十分鐘輕鬆考基礎篇第 38 回

活動4 利用配方法導出一元二次方程式根的公式，並由判別式知道一元二次方程式的解可爲相異兩根、重根或無解。

教學眉批

- 一元二次方程式公式解的推導過程較複雜，教師宜放慢講解步調。
- 教師可將數值實例寫於配方法推導過程之旁，以對照講解。
- 此處令 $a>0$，以方便說明 $\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}$ 的平方根爲 $\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$。
- 當 $a<0$ 且 $b^2-4ac\geqq 0$ 時，$ax^2+bx+c=0$ 的解也是 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$。此部分可於 P172 的動動腦再進行教學。

3 一元二次方程式的公式解

對應能力指標 8-a-16

在前面學過，當無法(或不易)使用因式分解法求一元二次方程式的解時，可以使用配方法求解。其實我們可以使用配方法，直接解一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0(a>0)$，而得到一個常用的公式：

解 $ax^2+bx+c=0$，$a>0$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$
同除以 a，將 x^2 項的係數變成 1

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$
將常數項移到等號右邊

$$x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$
將等號左邊配成完全平方式

$$=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$$
$$=-\frac{4ac}{4a^2}+\frac{b^2}{4a^2}$$
$$=\frac{-4ac+b^2}{4a^2}$$
$$=\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}$$

再根據平方根的概念，可知：

(1) 當 $b^2-4ac>0$ 時

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}>0$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

補充問題

- 已知 $b^2>4c$，試利用配方法解一元二次方程式 $x^2+bx+c=0$。

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2}$

(2)當 $b^2-4ac=0$ 時

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}\right)=0$$

$$x+\frac{b}{2a}=0 \quad \text{或} \quad x+\frac{b}{2a}=0$$

$$x=-\frac{b}{2a}\text{（重根）}$$

(3)當 $b^2-4ac<0$ 時

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}<0$$

因為負數沒有平方根，所以方程式沒有解。

因此，我們可得到：

一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$ 的**公式解**為

(1)當 $b^2-4ac>0$ 時，$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$。

(2)當 $b^2-4ac=0$ 時，$x=-\dfrac{b}{2a}$（重根）。

(3)當 $b^2-4ac<0$ 時，方程式沒有解。

由此可知，一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 可能有兩相異解、兩相同解(重根)或沒有解，這三種情形可由 b^2-4ac 的值來判斷，所以一般稱 b^2-4ac 為一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的**判別式**。接著，我們練習如何使用公式解來解一元二次方程式。

教學眉批

- 當 $b^2-4ac<0$ 時，解為虛數，國中階段我們是說「沒有解」。

補充問題

- 若一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 有解，則下列敘述何者正確？
(A) $b^2-4ac>0$ (B) $b^2-4ac<0$ (C) $b^2-4ac\geqq0$ (D) $b^2-4ac\leqq0$
(C)

活動5 利用公式解求一元二次方程式的解。

配合習作 P47 基礎題 4(1)

例題9 判別式大於 0（二次項係數為 1）

利用公式解法，求一元二次方程式 $x^2+3x-28=0$ 的解。

解 $x^2 + 3x - 28 = 0$

$$\begin{array}{ccccccc} x^2 & + & 3x & + & (-28) & = & 0 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ ax^2 & + & bx & + & c & = & 0 \end{array}$$

因為公式是由 $ax^2+bx+c=0$ 的形式導出，所以要以此形式比較。

比較上面兩式可知 $a=1$，$b=3$，$c=-28$。

將 $a=1$，$b=3$，$c=-28$ 代入 b^2-4ac

得 $b^2-4ac=3^2-4\times1\times(-28)=9+112=121>0$

故原方程式的解為 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$=\dfrac{-3\pm\sqrt{121}}{2\times1}=\dfrac{-3\pm11}{2}$

即 $x=\dfrac{-3+11}{2}=\dfrac{8}{2}=4$ 或

$x=\dfrac{-3-11}{2}=\dfrac{-14}{2}=-7$

所以方程式 $x^2+3x-28=0$ 的解為 4 與 -7。

例題10 判別式大於 0（二次項係數不為 1）

利用公式解法，求一元二次方程式 $3x^2-2x=4$ 的解。

解 因為 $3x^2-2x=4$，即 $3x^2-2x-4=0$，所以令 $a=3$，$b=-2$，$c=-4$，

得 $b^2-4ac=(-2)^2-4\times3\times(-4)=52>0$

故原方程式的解為 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{52}}{2\times3}=\dfrac{2\pm\sqrt{52}}{6}$

$=\dfrac{2\pm2\sqrt{13}}{6}=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{3}$

所以方程式 $3x^2-2x=4$ 的解為 $\dfrac{1+\sqrt{13}}{3}$ 與 $\dfrac{1-\sqrt{13}}{3}$。

$\dfrac{2\pm2\sqrt{13}}{6}$

$=\dfrac{2}{6}\pm\dfrac{2\sqrt{13}}{6}$

$=\dfrac{1}{3}\pm\dfrac{\sqrt{13}}{3}$

$=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{3}$

教學眉批

- 在例題 10 中，教師宜再強調「要先將一元二次方程式寫成 $ax^2+bx+c=0$ 的形式後，才能對照出 a、b、c 的值」，以免學生誤以 $a=3$，$b=-2$，$c=4$ 代入公式解。

配套指示器

- 類題熟練本 P57

補充問題

- 利用公式解法，求下列一元二次方程式的解：

(1) $(x-1)^2=29+x$

-4，7

(2) $3(x+2)^2=2(5x+7)$

$\dfrac{-1\pm\sqrt{7}}{3}$

例題 11 判別式小於 0

配合習作 P47 基礎題 4(2)

利用公式解法，求一元二次方程式 $x^2-3x+4=0$ 的解。

解 令 $a=1$，$b=-3$，$c=4$，得

$b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times4=-7<0$

所以方程式 $x^2-3x+4=0$ 沒有解。

隨堂練習

利用公式解法，求下列一元二次方程式的解：

(1) $x^2-3x-7=0$

令 $a=1$，$b=-3$，$c=-7$，得

$b^2-4ac=37>0$

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{3\pm\sqrt{37}}{2}$

(2) $4x^2+8x+5=0$

令 $a=4$，$b=8$，$c=5$，得

$b^2-4ac=-16<0$

所以方程式 $4x^2+8x+5=0$ 沒有解。

(3) $2x^2+6x=3$

$2x^2+6x-3=0$

令 $a=2$，$b=6$，$c=-3$，得

$b^2-4ac=60>0$

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-3\pm\sqrt{15}}{2}$

(4) $4x^2-11x+6=0$

令 $a=4$，$b=-11$，$c=6$，得

$b^2-4ac=25>0$

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{11\pm5}{8}$，

$x=2$ 或 $x=\dfrac{3}{4}$

例題 12 判別式等於 0

配合習作基礎題 4(3)

利用公式解法，求一元二次方程式 $9x^2+6x+1=0$ 的解。

解 令 $a=9$，$b=6$，$c=1$，得 $b^2-4ac=6^2-4\times9\times1=0$

故原方程式的解為 $x=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{6}{18}=-\dfrac{1}{3}$

所以方程式 $9x^2+6x+1=0$ 的解為 $-\dfrac{1}{3}$（重根）。

當一元二次方程式的某些項係數為分數時，我們可以先利用等量公理，將原方程式乘以各分母的最小公倍數，把各項的係數都變成整數，再使用公式，如下頁的例題。

教學眉批

■ 本節使用公式解來解題時，一律先求判別式 b^2-4ac 的值，再判斷解的情況。因此例題 11 求得 $b^2-4ac=-7<0$ 時，即知方程式沒有解。

■ 例題 12 依公式解求得 $b^2-4ac=0$ 時，以 $x=-\dfrac{b}{2a}$（重根）的方式來解題。若用 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 亦可。

補充問題

■ 利用公式解法，求下列一元二次方程式的解：

(1) $(x+1)^2=x-2$

沒有解

(2) $x(5x+4)=(x+1)(x-1)$

$-\dfrac{1}{2}$（重根）

配套指示器

■ 類題熟練本 P57、58

例題 13　係數化簡

配合習作 P48 基礎題 4(4)

利用公式解法，求一元二次方程式$-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}=0$的解。

解　將原方程式兩邊同乘以 -6 可得 $9x^2-2x-2=0$。

令 $a=9$，$b=-2$，$c=-2$，得

$b^2-4ac=(-2)^2-4\times9\times(-2)=4+72=76>0$

所以 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$=\frac{-(-2)\pm\sqrt{76}}{2\times9}$

$=\frac{2\pm\sqrt{2^2\times19}}{18}$

$=\frac{2\pm2\sqrt{19}}{18}$

$=\frac{1\pm\sqrt{19}}{9}$

故方程式$-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}=0$的解為$\frac{1+\sqrt{19}}{9}$與$\frac{1-\sqrt{19}}{9}$。

動動腦

將例題 13 中方程式兩邊同乘以 6 可得 $-9x^2+2x+2=0$，令 $a=-9$，$b=2$，$c=2$，代入公式解，觀察是否與例題 13 的解相同。

$b^2-4ac=2^2-4\times(-9)\times2=76>0$

所以 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2\pm\sqrt{76}}{2\times(-9)}=\frac{1\pm\sqrt{19}}{9}$

與例題 13 的解相同。

由例題 13 與動動腦可知，$a<0$ 時，公式解也適用。

教學眉批

■ 教師宜提醒學生例題 13 將原方程式兩邊同乘以 -6，主要是爲了代入公式解計算方便，若直接以原方程式的係數代入公式解計算也可以，但計算上會比較繁雜。

配套指示器

■ 類題熟練本 P58

補充問題

■ 解下列一元二次方程式：

(1) $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x-1=0$

$\frac{-1\pm\sqrt{73}}{6}$

(2) $-5x^2+10x-1=0$

$\frac{5\pm2\sqrt{5}}{5}$

隨堂練習

解下列一元二次方程式：

(1) $4x^2-4x+1=0$

令 $a=4$，$b=-4$，$c=1$，得

$b^2-4ac=(-4)^2-4\times4\times1=0$

故原方程式的解為

$x=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{1}{2}$（重根）

(2) $-\dfrac{2}{3}x^2-\dfrac{1}{3}x+3=0$

將方程式兩邊同乘以 -3 得

$2x^2+x-9=0$，

令 $a=2$，$b=1$，$c=-9$，得

$b^2-4ac=1^2-4\times2\times(-9)$

$=73>0$

故原方程式的解為

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-1\pm\sqrt{73}}{4}$

例題 14 公式解的應用

若一元二次方程式 $x^2+ax+9=0$ 有重根，則 a 的值是多少？

解 因為 $x^2+ax+9=0$ 有重根，表示其判別式為 0，

所以 $a^2-4\times1\times9=0$

$a^2-36=0$

$a^2=36$

$a=\pm6$

隨堂練習

若一元二次方程式 $x^2+(a+1)x+16=0$ 有重根，則 a 的值是多少？

方程式 $x^2+(a+1)x+16=0$ 有重根，表示其判別式為 0，所以

$(a+1)^2-4\times1\times16=0$

$(a+1)^2=64$

$a+1=\pm8$

由 $a+1=8$ 得 $a=7$。

由 $a+1=-8$ 得 $a=-9$。

教學眉批

- 反求係數的題型，教師可視學生程度補充沒有解時的題目，如：若一元二次方程式 $x^2+x+a=0$ 沒有解，則 a 的範圍爲何？

補充問題

1. 若一元二次方程式 $3x^2+ax+12=0$ 有重根，則 $a=$ ___±12___。
2. 承上題，若該方程式的兩根爲正數，則其根爲 ___2（重根）___。
3. 若一元二次方程式 $x^2-(a+2)x-a+1=0$ 有重根，則 $a=$ ___0 或 -8___。
4. 若一元二次方程式 $ax^2+2bx-3c=0$ 有重根，且 $b^2=k\cdot ac$，則 $k=$ ___-3___。

配套指示器

- 類題熟練本 P58
- 十分鐘輕鬆考基礎篇第 39、40 回

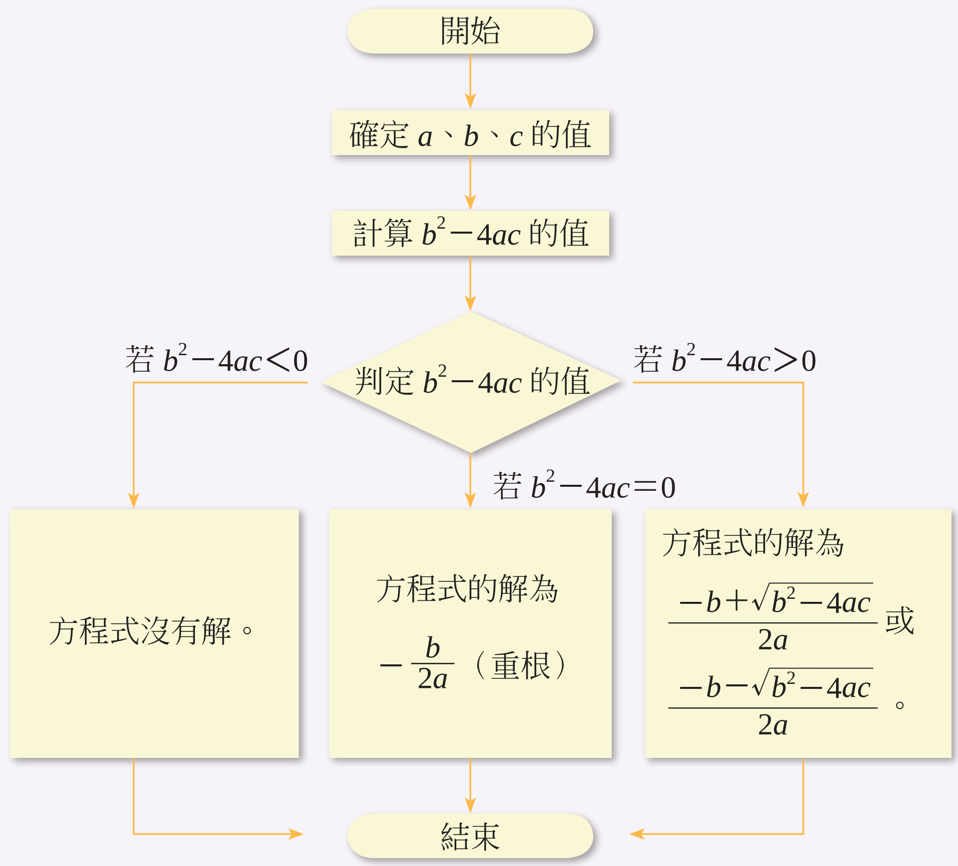
重點回顧

1. 形如$(ax+b)^2=c$ 的一元二次方程式（其中 $c\geqq 0$），可利用平方根的概念來求解。

2. 形如 x^2+mx 的式子，加上$(\frac{m}{2})^2$後，可配成完全平方式$(x+\frac{m}{2})^2$。
形如 x^2-mx 的式子，加上$(\frac{m}{2})^2$後，可配成完全平方式$(x-\frac{m}{2})^2$。

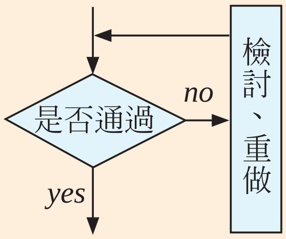
3. **配方法**：利用配成完全平方式的方法，將一元二次方程式變成$(x+a)^2=b$ 的形式，再利用平方根的概念來求解的過程，稱為配方法。

4. 利用公式解法來解一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的過程：



教學眉批

- 流程圖中，菱形用來表示分歧路線，控制流程時，常配合迴路使用，如：



配套指示器

- 無敵大補帖基礎篇 P31～35

4-2 自我評量

1. 求下列一元二次方程式的解：

(1) $(x+2)^2=16$

$x+2=\pm4$

由 $x+2=4$ 得 $x=2$。

由 $x+2=-4$ 得 $x=-6$。

(2) $(x+3)^2-5=0$

$(x+3)^2=5$

$x+3=\pm\sqrt{5}$

$x=-3\pm\sqrt{5}$

(3) $(x+5)^2+4=0$

$(x+5)^2=-4$

因為負數沒有平方根，

所以此方程式沒有解。

(4) $(2x+6)^2=8$

$2x+6=\pm\sqrt{8}$

$2x=-6\pm2\sqrt{2}$

$x=-3\pm\sqrt{2}$

2. 用配方法解下列一元二次方程式：

(1) $x^2+4x-3=0$

$x^2+4x=3$

$(x+2)^2=3+2^2=7$

$x+2=\pm\sqrt{7}$

$x=-2\pm\sqrt{7}$

(2) $x^2+6x+10=0$

$x^2+6x=-10$

$(x+3)^2=-10+3^2=-1$

因為負數沒有平方根，

所以此方程式沒有解。

(3) $3x^2+5x+1=0$

$x^2+\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}=0$

$x^2+\frac{5}{3}x=-\frac{1}{3}$

$(x+\frac{5}{6})^2=-\frac{1}{3}+(\frac{5}{6})^2=\frac{13}{36}$

$x+\frac{5}{6}=\pm\frac{\sqrt{13}}{6}$

$x=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{6}$

(4) $x^2-8x=384$

$x^2-2\cdot x\cdot4+4^2=384+4^2$

$(x-4)^2=400$

$x-4=\pm20$

$x=24$ 或 $x=-16$

教學眉批

- 第 2 題要求用配方法解題，宜提醒學生勿用公式解。

補充問題

1. 解下列一元二次方程式：

(1) $(9x-21)^2=25$

$\frac{16}{9}$，$\frac{26}{9}$

(2) $(x+1)^2+81=0$

沒有解

2. 用配方法解下列一元二次方程式：

(1) $4x^2+9x+3=0$

$-\frac{9}{8}\pm\frac{\sqrt{33}}{8}$

(2) $x^2-32x-833=0$

-17，49

配套指示器

- 類題熟練本 P59
- 考前衝刺 P22、23
- 考前 100 分 P22、23
- 歷屆基測試題 4-2

教學眉批

- 第 3 題要求用公式解，提醒學生勿用其他方法。

3. 利用公式解法，求下列一元二次方程式的解：

(1) $x^2-7x+9=0$

令 $a=1$，$b=-7$，$c=9$，得

$b^2-4ac=(-7)^2-4\times1\times9=13>0$

所以 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$=\dfrac{-(-7)\pm\sqrt{13}}{2\times1}$

$=\dfrac{7\pm\sqrt{13}}{2}$

(2) $6x^2-7x+3=0$

令 $a=6$，$b=-7$，$c=3$，得

$b^2-4ac=(-7)^2-4\times6\times3$

$=-23<0$

所以方程式 $6x^2-7x+3=0$ 沒有解。

(3) $-x^2+4x+12=0$

兩邊乘以 -1，得

$x^2-4x-12=0$

令 $a=1$，$b=-4$，$c=-12$，得

$b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times(-12)$

$=64>0$

所以 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$=\dfrac{-(-4)\pm\sqrt{64}}{2\times1}=\dfrac{4\pm8}{2}$

$x=\dfrac{4+8}{2}=6$ 或 $x=\dfrac{4-8}{2}=-2$

(4) $4x^2+9=12x$

$4x^2-12x+9=0$

令 $a=4$，$b=-12$，$c=9$，得

$b^2-4ac=(-12)^2-4\times4\times9=0$

所以 $x=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-(-12)}{2\times4}$

$=\dfrac{3}{2}$（重根）

4. 當 a 的值為下列哪些數時，方程式 $x^2-2x+a=0$ 會沒有解？

-3 、-2、-1 、0 、1、2 、3

方程式 $x^2-2x+a=0$ 沒有解，表示其判別式 <0。所以

$b^2-4ac=(-2)^2-4a=4-4a<0$

即 $4-4a<0$

$1-a<0$

$a>1$

所以當 $a=2$ 或 $a=3$ 時，方程式沒有解。

配套指示器

- 類題熟練本 P59
- 十分鐘輕鬆考進階篇第 17 回
- 無敵大補帖進階篇 P27、28

補充問題

1. 若方程式 $x^2-x-a=0$ 沒有解，求 a 的範圍。

$a<-\dfrac{1}{4}$

2. 若方程式 $x^2-x-a=0$ 有解，求 a 的範圍。

$a\geqq-\dfrac{1}{4}$